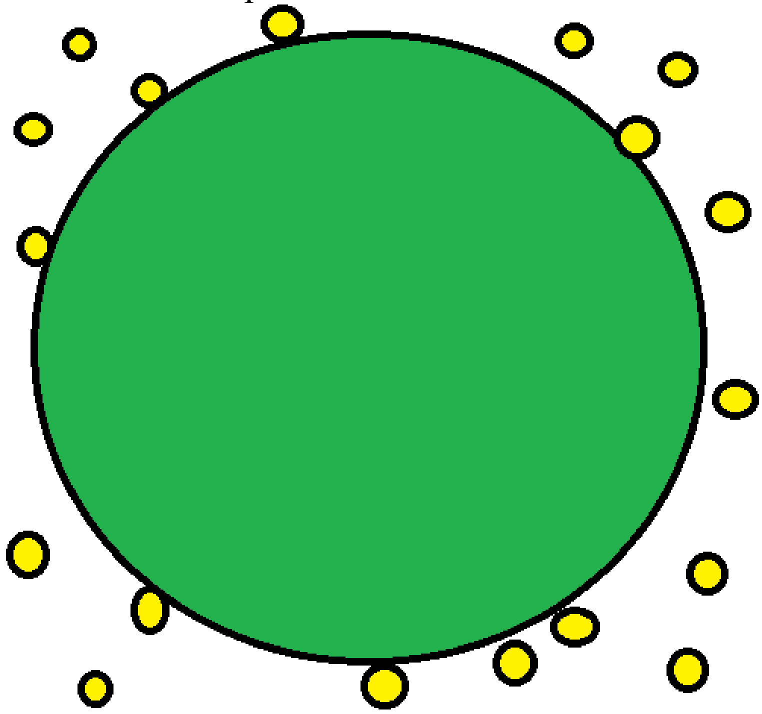
Данная серия методичек посвящается Сергею Дмитриевичу Мостовому

Первая пара, понедельник.
Студенты болтают на перерыве.
Мостовой: Вы же говорили, что вы спите на первой паре. По вам не видно!
Студенты: Статфиз взбодряет!

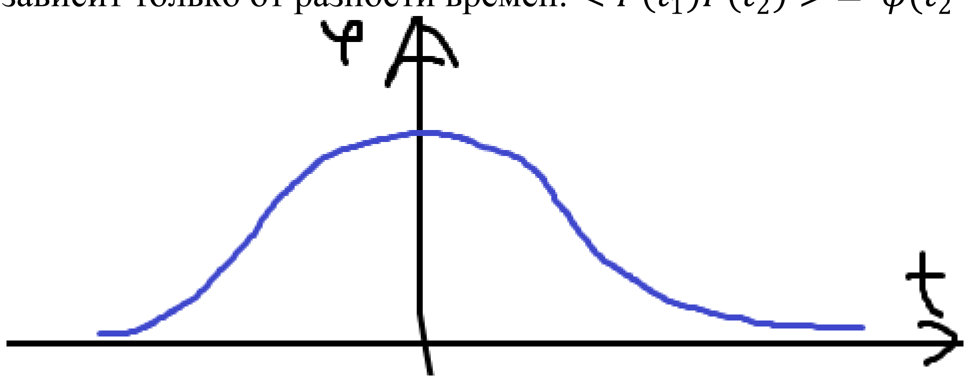
Будем изучать Броуновское движение. Или Брауновское. Он вообще Brown был.

Броуновское движение – это когда очень большую частицу поместили в среду из более мелких частиц; в результате случайных столкновений с частицами она движется туда-сюда. Помните, как вам в школе рассказывали про частички пыльцы на поверхности воды?

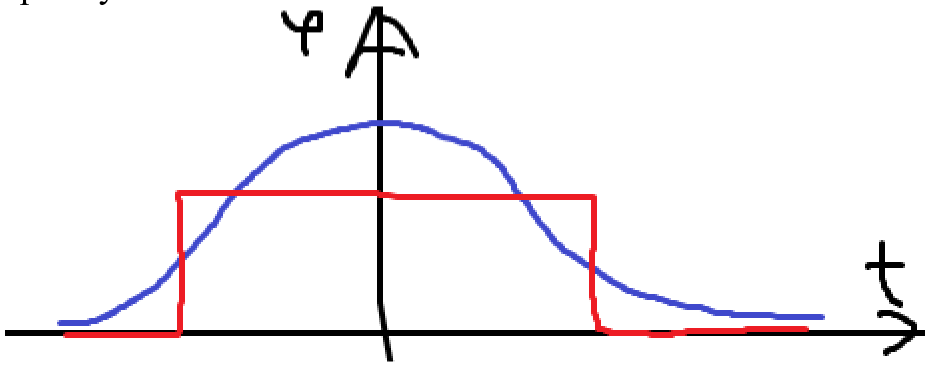


И они бьются, создавая силу $F(t)$ - суммарную силу воздействия частиц в каждый момент времени. Она вообще является случайным процессом (кажется, винеровским).

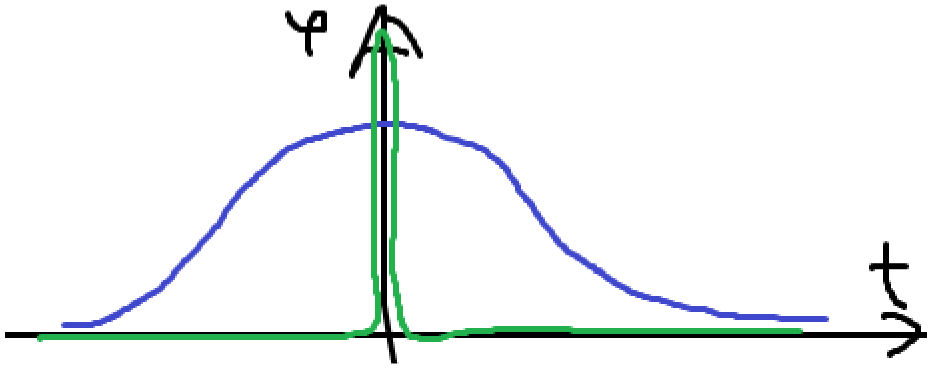
А как выглядит корреляционная функция $< F(t_1)F(t_2) >$? Вообще, очевидно, она зависит только от разности времён: $< F(t_1)F(t_2) > = \varphi(t_2 - t_1)$.



На рисунке выглядит как Гаусс. На самом деле это не обязательно Гаусс, но нечто подобное.
Сложно. Сложная функция. Давайте её саппроксимируем. Можно прямоугольником:



Но гораздо будет лучше дельта-функцией:



$$< F(t_1)F(t_2) > = C * \text{б}(t_2 - t_1)$$

Чему равно С? Вообще $C = 2\Gamma m\theta$. Почему именно так, установим в задаче 29.
Это нам пригодится для решения дальнейших задачах.

Запишем уравнения Ланжевена:

7. Записать уравнение Ланжевена для импульса брауновской частицы, охарактеризовать корреляционную функцию случайного силового воздействия на частицу.

$$\begin{cases} \dot{p} + \Gamma p = F(t) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

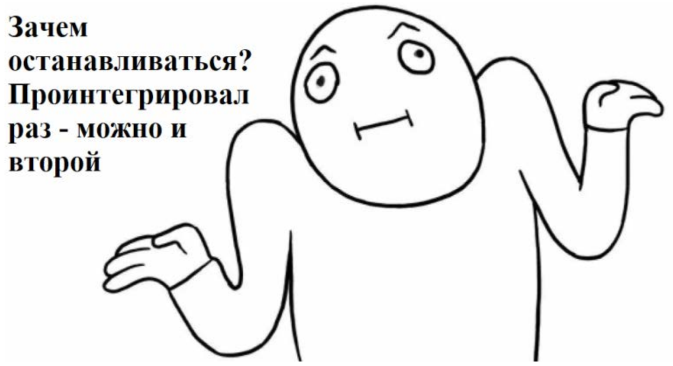
p – проекция импульса.
Если вы не узнали, первое уравнение – это второй закон Ньютона. FА Γp - сила вязкого трения. Γ – коэф вязкого трения.

Эту систему можно решить, проинтегрировав один раз:

$$p(t) = p_0 e^{-\Gamma t} + \int_0^t e^{-\Gamma(t-\text{т})} F(\text{т}) d\text{т}$$

Если вы помните из дифуров функцию Коши, то, вы, конечно, её узнаете.

А можем и ещё раз проинтегрировать:



$$x(t) = x_0 + v_0 \frac{1 - e^{-\Gamma t}}{\Gamma} + \int_0^t \frac{1 - e^{-\Gamma \tau}}{\Gamma m} F(t - \tau) d\tau$$

У этой системы и у её решений есть одна проблема – мы не знаем F(t)!
Решение проблемы: приходится усреднять и пользоваться тем, что мы знаем $< F(t_1)F(t_2) >$. Сейчас на задачах покажем, как это делается.

Решим задачу 29:

Задача 29.
Определить в шкале времени $t \gg \tau$ (включая $dt \gg \tau$) корреляцию отклонений импульса броуновской частицы от среднего значения $\overline{\Delta p(t)\, \Delta p(t + \Delta t)}$. Сравнить ее поведение как функции Δt с корреляцией отклонений координаты броуновской частицы $\overline{\Delta x(t)\, \Delta x(t + \Delta t)}$.

Напомним, что $\Delta p(t) = p(t) - < p(t) > = p(t)$ (т.к. $< p(t) >$ 0).
Возьмём формулу

$$p(t) = p_0 e^{-\Gamma t} + \int_0^t e^{-\Gamma(t-\tau)} F(\tau) d\tau$$

Во всех задачах полагаем $p_0 = 0$, поэтому слагаемое с ним сразу уйдёт.
Запишем формулу два раза – в момент времени t и $t + \Delta t$:

$$p(t) = \int_0^t e^{-\Gamma(t - t_1)} F(t_1) dt_1$$

$$p(t + \Delta t) = \int_0^{t + \Delta t} e^{-\Gamma(t + \Delta t - t_2)} F(t_2) dt_2$$

Я ещё переменные интегрирования, чтобы не повторялись, обозначил то t_1, то t_2
А теперь перемножаю:

$$p(t)p(t + \Delta t) = \int_0^t e^{-\Gamma(t - t_1)} F(t_1) dt_1 \int_0^{t + \Delta t} e^{-\Gamma(t + \Delta t - t_2)} F(t_2) dt_2$$

О-па, у нас две F-ки перемножаются. А мы знаем, что $F(t_1)F(t_2)$ мы грубо оценили как $C\text{б}(t_2 - t_1)$. Отлично:

$$\int_0^t e^{-\Gamma(t-t_1)}dt_1 \int_0^{t+\Delta t} e^{-\Gamma(t+\Delta t-t_2)}dt_2 * Cб(t_2-t_1) = C\int_0^t e^{-\Gamma(t-t_1)}e^{-\Gamma(t+\Delta t-t_1)}dt_1$$

$$= Ce^{-2\Gamma t-\Gamma\Delta t}\int_0^t e^{2\Gamma t_1}dt_1 = Ce^{-2\Gamma t-\Gamma\Delta t} * \frac{e^{2\Gamma t}-1}{2\Gamma} = Ce^{\Gamma\Delta t} * \frac{1-e^{-2\Gamma t}}{2\Gamma}$$

Рассмотрим важный частный случай $\Delta t = 0$. Тогда $< p(t)p(t+\Delta t) > = < p^2(t) >$ - дисперсию импульса. Она окажется равной $C * \frac{1-e^{-2\Gamma t}}{2\Gamma}$, при больших t это будет $\frac{C}{2\Gamma}$.
Почему это важный частный случай? Потому что мы знаем $< p^2(t) >$ ещё из распределения Максвелла. Сравним его результат с нашим, мы
А Максвелл говорит, что по его выкладкам это должно быть $m\theta$. Отсюда и получаем $C = 2\Gamma m\theta$.

Замечание по оформлению: в момент, когда мы заменяем $F(t_1)F(t_2)$ на $Cб(t_2-t_1)$, мы на самом деле усредняем по времени (потому что именно среднее значение произведения $F(t_1)F(t_2)$, т.е. $< F(t_1)F(t_2) >$ равно $Cб(t_2-t_1)$), поэтому именно в этот момент скобки Дирака появляются и левой части: вместо $p(t)p(t+\Delta t)$ выходит $< p(t)p(t+\Delta t) >$.

Пока не будем вычислять вторую корреляцию в этой задаче и переключимся на 30-ю задачу:

Задача 30.
Определить в шкале времени $t \gg \tau$ корреляцию отклонений импульса и отклонений координаты от своих средних значений $\overline{\Delta p\,\Delta x}$ и оценить это "соотношение неопределенностей" в случае $t \gg 1/\Gamma$.

Как вы догадываетесь, мы  берём $p(t) = \int_0^t e^{-\Gamma(t-t_1)}F(t_1)dt_1$

Берём  $x(t) = \int_0^t \frac{1-e^{-\Gamma t_2}}{\Gamma m}F(t-t_2)dt_2$
(напоминаю, что в начале всё-всё равно нулю – и координата, и скорость, и импульс).

Перемножаем  :

$$p(t)x(t) = \int_0^t e^{-\Gamma(t-t_1)} F(t_1)dt_1 \int_0^t \frac{1-e^{-\Gamma t_2}}{\Gamma} F(t-t_2)dt_2$$

Получаем

$$< p(t)x(t) >= \int_0^t e^{-\Gamma(t-t_1)} \frac{1-e^{-\Gamma(t-t_1)}}{\Gamma m} dt_1$$

Радостно берём такой интеграл и получаем ответ

$$< p(t)x(t) > = 2\theta \left(\frac{1-e^{-\Gamma t}}{\Gamma} - \frac{1-e^{-\Gamma t}}{2\Gamma} \right)$$

При $t \gg \frac{1}{\Gamma}$

$$< p(t)x(t) > \to 2\theta \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{2\Gamma} \right) = \frac{\theta}{\Gamma}$$

Ну и давайте дорешаем 29-ю задачу – у нас там осталась последняя корреляция, $< x(t)x(t+\varDelta t) >$

Думаю, вы уже догадываетесь, как действовать.

$$x(t)x(t+\varDelta t) \ = \int_0^t \frac{1-e^{-\Gamma t_1}}{\Gamma m} F(t-t_1)dt_1 \int_0^{t+\varDelta t} \frac{1-e^{-\Gamma t_1}}{\Gamma m} F(t+\varDelta t - t_2)dt_2$$

Ну а далее усредняем:

$$x(t)x(t+\varDelta t) \ = C \int_0^t \frac{1-e^{-\Gamma t_1}}{\Gamma m} \frac{1-e^{-\Gamma(t_1+\varDelta t)}}{\Gamma m} dt_1 = \frac{Ce^{-\Gamma \varDelta t}}{(\Gamma m)^2} \int_0^t (1+e^{-2\Gamma t_1})dt_1$$

$$= \frac{2\theta}{\Gamma m}(t+\cdots)$$

Я специально не стал выписывать остаточные члены (читатель может их получить сам, взяв интеграл), а хочу лишь акцентировать внимание на отстутвие предела при $t \to \infty$. Так и должно быть.

Попутно мы ответили на теорвопросы:

25. Пользуясь уравнением Ланжевена для импульса брауновской частицы, получить зависимость от времени дисперсий ее импульса и координаты в шкале времени, грубой по сравнению со временем автокорреляции случайной силы.

26. Пользуясь уравнением Ланжевена, получить корреляционную функцию $\overline{\Delta p(t)\,\Delta p(t+\Delta t)}$ отклонения ее импульса от среднего значения в шкале времени, грубой по сравнению со временем автокорреляции случайной силы.

27. Пользуясь уравнением Ланжевена, получить корреляционную функцию $\overline{\Delta x(t)\,\Delta x(t+\Delta t)}$ отклонения ее координаты от среднего значения на временах, больших по сравнению со временем забывания начальных условий.